A

Convergence des méthodes itératives matricielles

Leçons : 233

Réf. : Ciarlet, *Introduction à l'ANM et à l'optimisation* p 102, 103, 104

Serre (Denis), *Matrices : Theory and applications* p 153

Cadre : on rappelle que les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxations sont définies pour $A \in GL_n(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ telles que $a_{ii} \neq 0 \ \forall 1 \leq i \leq n$.

Prop ① : Si la méthode de relaxation converge, alors $0 < \omega < 2$ [Ciarlet]

Th. ② : OSP A à diagonale strictement dominante. Alors : [Serre]

1) la méthode de Jacobi converge

2) si $0 < \omega \leq 1$, la méthode de relaxation converge

Th. ③ : OSP $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A = M - N$, $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $N \in M_n(\mathbb{R})$ [Ciarlet]

Alors, $M^* + N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et si $M^* + N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$

Coro ④ : OSP $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors : [Ciarlet]

1) si $D + E + F \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors la méthode de Jacobi converge

2) si $0 < \omega < 2$, alors la méthode de relaxation converge

Rappel : $A = D - E - F = \begin{pmatrix} D & & -F \\ & \ddots & \\ -E & & D \end{pmatrix}$

Prop. ① :

$$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F\right] = (\overbrace{D - \omega E}^{\text{triangulaire inférieure}})^{-1} \left[\overbrace{(1-\omega) D + \omega F}^{\text{triangulaire supérieure}}\right]$$

OSP que la méthode de relaxation converge. On a donc $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$

donc $$|\det(\mathcal{L}_\omega)| = \prod_{\lambda \in Sp(\mathcal{L}_\omega)} |\lambda| \leq \rho(\mathcal{L}_\omega)^n < 1$$

On a, $\det(\mathcal{L}_\omega) = \frac{1}{\det D} \times (1-\omega)^n \times \det D = (1-\omega)^n$

donc $|(1-\omega)^n| < 1$ donc $|1-\omega| < 1$ donc $\boxed{0 < \omega < 2}$

Th. (2) :

1) Jacobi : on m.q. $\|J\|_\infty < 1$

$J = D^{-1}(E+F)$ donc $J_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$

On a $\|J\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |J_{ij}|$

$1 \leq i \leq n \qquad \sum_{j=1}^{n} |J_{ij}| = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < 1$ (A à diag. st. dominante)

donc $\|J\|_\infty < 1$ donc $\rho(J) < 1$ donc $\boxed{\text{la méthode de Jacobi converge}}$

2) Relaxation pour $0 < \omega \leq 1$: $\lambda \in Sp(\mathcal{L}_\omega)$ et m.q. $|\lambda| < 1$

Soit $\lambda \in Sp(\mathcal{L}_\omega)$ et x $\vec{vp}$ de $\mathcal{L}_\omega$ associé à λ.

$\mathcal{L}_\omega x = \lambda x \Rightarrow (D-\omega E)^{-1}[(1-\omega)D + \omega F]x = \lambda x$

$(1-\omega)Dx + \omega F x = \lambda D x - \lambda \omega E x$

$(1-\omega-\lambda)Dx = -\omega(F+\lambda E)x$

donc $\boxed{D^{-1}(F+\lambda E)x = \frac{\lambda+\omega-1}{\omega} x}$

Donc x est $\vec{vp}$ de $D^{-1}(F+\lambda E)$ associé à la vp $\frac{\lambda+\omega-1}{\omega}$

$$D^{-1}(F+\lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & & D^{-1}F \\ & \ddots & \\ \lambda D^{-1}E & & 0 \end{pmatrix}$$

Par le théorème de Gershgorin-Hadamard, il existe $1 \leq i \leq n$ tel que

$$\left| \frac{\lambda+\omega-1}{\omega} - 0 \right| \leq \sum_{j<i} |\lambda| \cdot \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} + \sum_{i<j} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

$$\leq \max(|\lambda|, 1) \times \underbrace{\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}|}_{<1}$$

donc $\boxed{|\lambda+\omega-1| < \omega \max(|\lambda|, 1)}$

Si $|\lambda| \geq 1$, alors

- si $\omega = 1$: $|\lambda| < |\lambda|$ absurde
- si $0 < \omega < 1$: $|\lambda| - |\omega - 1| \leq |\lambda + \omega - 1| < \omega|\lambda|$

$$|\lambda| - 1 + \omega < \omega|\lambda|$$

$$(1-\omega)|\lambda| < 1 - \omega$$

$$|\lambda| < 1 \quad \text{absurde}$$

donc $|\lambda| < 1$ donc $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$ donc la méthode de relaxation converge.

Th ③ :

1) $(M^* + N)^* = M + N^* = M + (M - A)^* \overset{A^* = A}{=} M + M^* - A = M^* + N$

donc $M^* + N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

2) Méthode : $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et une norme $\|\cdot\|_A$

M.q. $\|M^{-1}N\|_A < 1$

$x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose $\langle x, y\rangle_A = x^* A y$ et $\|x\|_A = \sqrt{\langle x, x\rangle_A}$.

M.q. $\|M^{-1}N\|_A = \sup_{\|x\|_A = 1} \{\|M^{-1}Nx\|_A\} < 1$

Soit $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_A = 1$.

On a $M^{-1}N = I - M^{-1}A$ donc $M^{-1}Nx = x - M^{-1}Ax = x - w$.

$$\|M^{-1}Nx\|_A^2 = \|x - w\|_A^2$$

$$= \|x\|_A^2 - x^* A w - w^* A x + w^* A w \qquad x = A^{-1}Mw$$

$$= 1 - w^*(M^* \underbrace{(A^{-1})^* A}_{=I})w - w^*(\underbrace{A A^{-1}}_{=I} M)w + w^* A w$$

$$= 1 - w^*(M^* + (M - A))w$$

$$\|M^{-1}Nx\|_A^2 = 1 - w^* \underbrace{(M^* + N)}_{\in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} w$$

donc $\|M^{-1}Nx\|_A < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_A = 1$

On, $\|M^{-1}N\|_A$ est atteinte (dimension finie $\Rightarrow B_{\|\cdot\|_A}(0,1)$ compacte)

donc $\|M^{-1}N\|_A < 1$ donc $\boxed{\rho(M^{-1}N) < 1}$

Cons ④ :

1) application directe de Th ③

2) $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $a_{ii} > 0 \ \forall 1 \leq i \leq n$ (faire $(0 \cdot 1 \cdot 0) A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > 0$)

donc $\boxed{D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

$$M^* + N = \left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^* + \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F$$

$D^* = D$

$$= \left(\frac{2}{\omega} - 1\right) D - E^* + F$$

$E^* = F$ car $A^* = A$

$$\boxed{M^* + N = \frac{2-\omega}{\omega} D}$$

Donc $M^* + N \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \frac{2-\omega}{\omega} > 0$

$\iff 0 < \omega < 2$

Donc $\boxed{\text{si } 0 < \omega < 2,\ \rho(M^{-1}N) = \rho(\mathcal{L}_\omega) < 1 \text{ et la méthode de relaxation converge.}}$